Точка вне окружности

В.АЛЕКСЕЕВ, В.ГАЛКИН, В.ПАНФЕРОВ, В.ТАРАСОВ

Опорные задачи

Задача 1. *Докажите, что угол между двумя секущими измеряется полуразностью дуг, на которые он опирается (рис.1).*

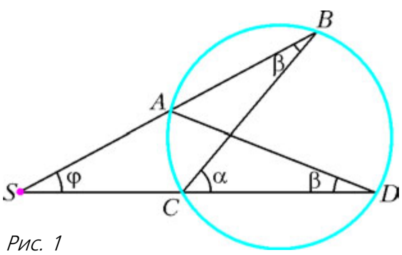

Рис. 1

Задача 2. *В обозначениях рисунка 1 докажите, что*

$$SA \cdot SB = SC \cdot SD .$$

Задача 3. *Докажите, что (рис.2)*

$$ST^2 = SA \cdot SB .$$

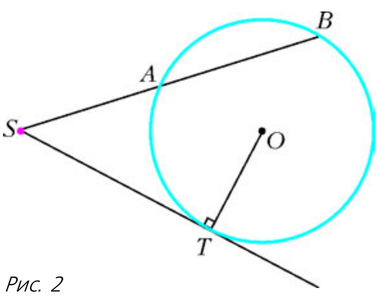

Рис. 2

Задача 4. *Пусть AB – хорда, BC – касательная к окружности в точке B (рис.3). Докажите, что угол B измеряется половиной дуги окружности, расположенной внутри этого угла.*

Отметим один важный частный случай, когда секущие SB и SD опираются на диаметр BD окружности (рис.4).

Задача 5. *Докажите, что*

$$\frac{AC}{BD} = \cos\gamma .$$

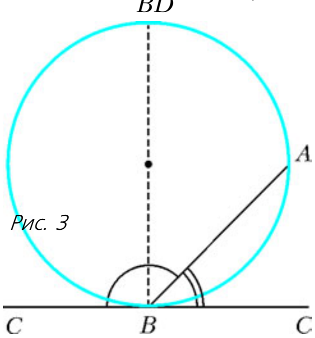

Рис. 3

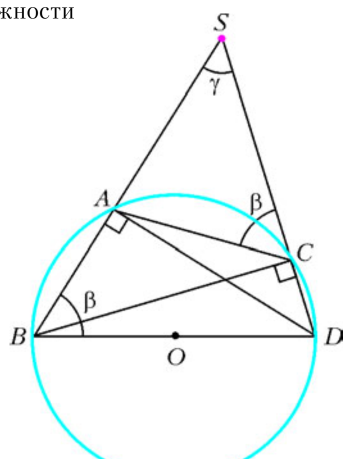

Рис. 4

Решение. Заметим, что BC и DA – высоты треугольника BSD. Поэтому

$$\cos\gamma = \frac{SC}{SB} = \frac{SA}{SD} .$$

Но треугольники ASC и BSD подобны, так как, например, $\angle SCA = 180° - \angle ACD = 180° - (180° - \beta) = \beta$. Поэтому

$$\frac{SA}{SD} = \frac{AC}{BD} = \cos\gamma .$$

Задача 6. *В четырехугольнике ABCD, вписанном в окружность, диагональ AC является диаметром окружности. Докажите, что* $\frac{BD}{AC} = \cos\alpha$, *где* α *– угол между прямыми BC и AD, равный углу между прямыми AB и CD.*

Решение. Пусть M – точка пересечения прямых AB и CD, а N – точка пересечения прямых BC и AD (рис.5). Так как AC – диаметр, то MD и NB – высоты треугольника AMN, а C – ортоцентр этого треугольника. При этом $\angle NAB = 90° - \alpha$ и $BD = 2R\sin(90° - \alpha) = 2R\cos\alpha$ по теореме синусов. А так как $AC = 2R$, то

$$\frac{BD}{AC} = \cos\alpha .$$

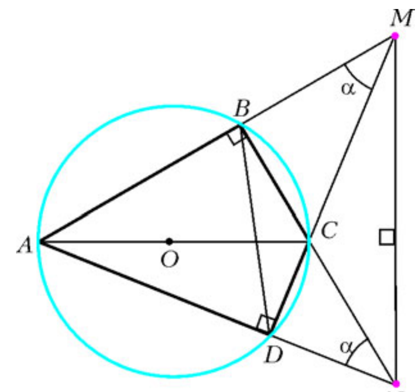

Рис. 5

Рассмотрим еще одну типичную конфигурацию.

Задача 7. *Пусть SP и SQ – касательные к данной окружности, секущая пересекает PQ в точке B, а окружность – в точках A и C (рис.6). Докажите, что*

$$\frac{SA}{SC} = \frac{BA}{BC} .$$

Решение. Заметим сразу, что (обозначения ясны из рисунка 6) $xy = bc$ (свойство отрезков хорд), $t^2 = (a+b+c)a$ (свойство отрезков касательной и секущей).

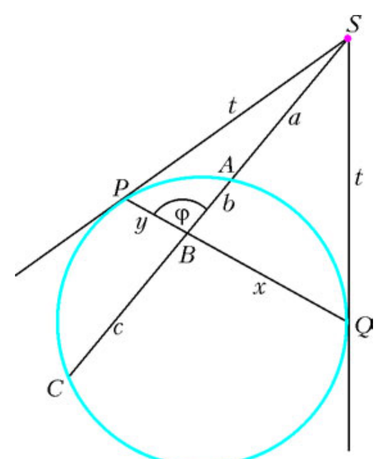

Рис. 6

Далее, треугольник PSQ – равнобедренный. По теореме косинусов для треугольников BSQ и BSP имеем

$$t^2 = (a+b)^2 + x^2 + 2x(a+b)\cos\varphi ,$$

$$t^2 = (a+b)^2 + y^2 - 2y(a+b)\cos\varphi .$$

Умножим первое равенство на y, второе – на x, а затем сложим. В результате получим

$$(x+y)t^2 = (a+b)^2(x+y) + xy(x+y) .$$

Отсюда

$$(a+b)^2 = t^2 - xy = (a+b+c)a - bc ,$$

и, наконец,

$$(a+b+c)b = ac .$$

Но это и значит, что $\frac{SA}{SC} = \frac{BA}{BC}$.

Замечание 1. Последнюю задачу можно было бы сформулировать так:

Докажите, что точки S и B делят отрезок AC в одном и том же отношении внешним и внутренним образом соответственно.

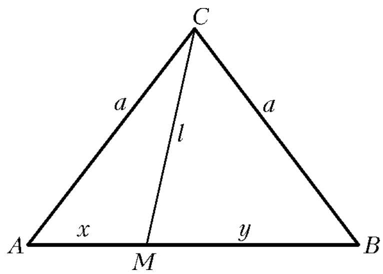

Рис. 7

Замечание 2. Решая задачу 7, мы вывели весьма полезное соотношение, справедливое для равнобедренных треугольников:

Если точка M лежит на основании AB равнобедренного треугольника ACB (рис.7), в котором $CM = l$, $AM = x$, $MB = y$, $BC = a$, то

$$l^2 = a^2 - xy.$$

Задачи вступительных экзаменов

Представленные далее задачи взяты, в основном, из вариантов вступительных экзаменов разных лет Московского государственного университета им. М.В.Ломоносова.

Задача 8. *Из точки A проведены к окружности две касательные (M и N – точки касания) и секущая, пересекающая эту окружность в точках B и C, а хорду MN – в точке P, причем AB : BC = 2 : 3. Найдите AP : PC.*

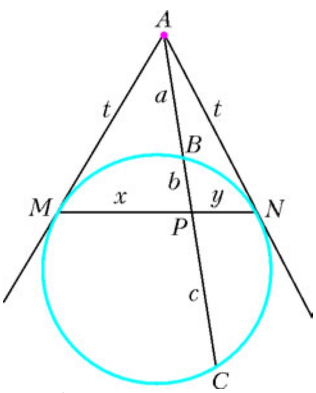

Рис. 8

Решение. Используем задачу 7 (рис.8). Здесь по условию $a:(b+c) = 2:3$. Требуется найти отношение $(a+b):c$. Так как $a = 2k$, $b + c = 3k$ при некотором $k > 0$ и $(a+b+c)b = ac$, то $(2k+3k)b = 2kc$, откуда $b:c = 2:5$. Значит, $b = 2m$, $c = 5m$ при $m > 0$. Итак, $b + c = 3k = 7m$, т.е. $k = \frac{7}{3}m$. Поэтому

$$\frac{a+b}{c} = \frac{2k+2m}{5m} = \frac{4}{3}.$$

При решении целого ряда задач бывает полезным провести вспомогательную окружность и уже к ней применять результаты опорных задач.

Задача 9. *В остроугольном треугольнике ABC из вершин A и C опущены высоты AP и CQ на стороны BC и AB. Известно, что площадь треугольника ABC равна 18, площадь треугольника BPQ равна 2, а длина отрезка PQ равна $2\sqrt{2}$. Вычислите радиус окружности, описанной около треугольника ABC.*

Решение. Из точек P и Q отрезок AC виден под одним и тем же углом в $90°$, так как $AP \perp BC$ и $CQ \perp AB$ по условию (рис.9). Поэтому четырехугольник $AQPC$ вписанный, секущие BA и BC опираются на диаметр AC, и можно использовать опорные свойства: наличие двух пар подобных треугольников, а именно

$$\Delta BPQ \sim \Delta BAC \text{ и}$$

$$\Delta BPA \sim \Delta BQC,$$

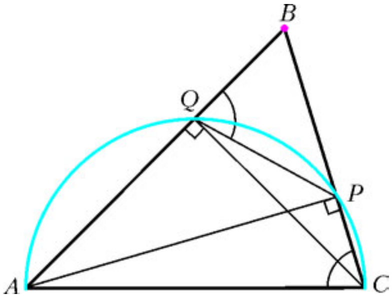

Рис. 9

и соотношение

$$\frac{PQ}{AC} = \frac{BP}{BA} = \cos\angle B.$$

Из подобия треугольников имеем

$$\frac{PQ}{AC} = \sqrt{\frac{S_{BPQ}}{S_{ABC}}} = \frac{1}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{AC} = \cos\angle B,$$

откуда

$$AC = 6\sqrt{2} \text{ и } \sin\angle B = \sqrt{1-\cos^2\angle B} = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Искомый радиус $R = R_{ABC}$ найдем из теоремы синусов:

$$R = \frac{AC}{2\sin\angle B} = \frac{9}{2}.$$

Задача 10. *В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AM и CN, точка O – центр описанной около треугольника ABC окружности. Известно, что величина угла ABC равна β, а площадь четырехугольника NOMB равна S. Найдите длину стороны AC.*

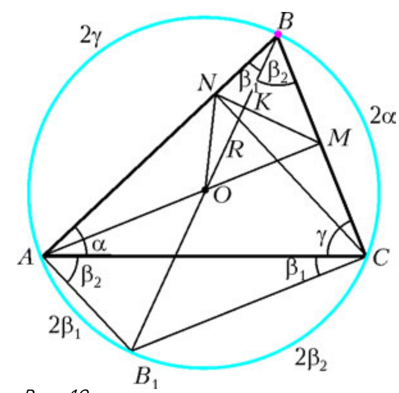

Рис. 10

Решение. Радиус $R = OB$ описанной окружности делит угол β на два угла: $\angle ABO = \beta_1$ и $\angle CBO = \beta_2$ такие, что (рис.10)

$$\beta_1 + \gamma = \frac{\pi}{2},\quad \beta_2 + \alpha = \frac{\pi}{2}.$$

В четырехугольнике $ONBM$ диагонали перпендикулярны, и мы оказываемся в стандартной ситуации: точка B лежит вне окружности $ANMC$, а секущие BA и BC опираются на ее диаметр AC. Действительно, $\angle BNM = \pi - \angle ANM = \gamma$ и в треугольнике NKB, где K – точка пересечения OB и NM, $\angle BKM = \pi - (\beta_1 + \gamma) = \frac{\pi}{2}$, т.е. $BO \perp MN$. Кроме того, диагональ MN связана с искомой длиной AC:

$$MN = AC\cos\beta$$

из подобий треугольников: $\Delta BMN \sim \Delta BAC$, $\Delta BMA \sim \Delta BNC$. Другая диагональ $OB = R$ связана с AC через теорему синусов:

$$OB = R = \frac{AC}{2\sin\beta}.$$

Наконец, имеем $AC = 2\sqrt{S\operatorname{tg}\beta}$, поскольку площадь S четырехугольника равна $S = \frac{1}{2}R\cdot MN$, или $S = \frac{1}{4}AC^2\operatorname{ctg}\beta$.

Задача 11. *Отрезки, соединяющие основания высот остроугольного треугольника, равны 5, 12 и 13. Найдите площадь треугольника.*

Решение. Пусть A_1, B_1, C_1 – основания высот остроугольного треугольника ABC, $A_1B_1 = 5$, $A_1C_1 = 12$, $B_1C_1 = 13$ (рис.11). Ясно, что $\Delta A_1B_1C_1$ является прямоугольным с прямым углом A_1, так что $S_{A_1B_1C_1} = 30$. Четырехугольник ABA_1B_1 вписан в окружность с диаметром AB. Мы пришли к уже известной геометрической конфигурации: из точки C вне окружности проведены секущие CA и CB, опирающиеся на диаметр AB. При этом стороны $\Delta A_1B_1C_1$ отсекают от ΔABC три подобных ему треугольника с коэффициентами подобия $\cos\gamma$, $\cos\alpha$, $\cos\beta$ соответственно. Кроме того,

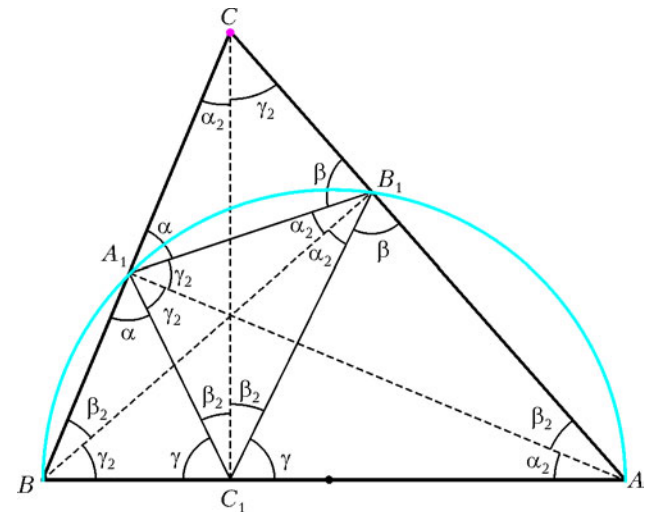

Рис. 11

высоты треугольника ABC являются биссектрисами ортотреугольника $A_1B_1C_1$. Действительно,

$$\begin{cases} \angle B_1A_1A = \dfrac{\pi}{2} - \angle CA_1B_1 = \dfrac{\pi}{2} - \alpha, \\ \angle C_1A_1A = \dfrac{\pi}{2} - \angle BA_1C_1 = \dfrac{\pi}{2} - \alpha \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle B_1A_1A = \angle C_1A_1A = \frac{\pi}{2} - \alpha = \gamma_2 .$$

Аналогично,

$$\angle A_1B_1B = \angle C_1B_1B = \frac{\pi}{2} - \beta = \alpha_2 ,$$

$$\angle A_1C_1C = \angle B_1C_1C = \frac{\pi}{2} - \gamma = \beta_2 .$$

Между углами $\angle A_1 = 2\gamma_2$, $\angle B_1 = 2\alpha_2$, $\angle C_1 = 2\beta_2$ ортотреугольника $A_1B_1C_1$ и углами $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, $\angle C = \gamma$ исходного треугольника ABC имеется взаимооднозначное соответствие:

$$\begin{cases} \angle A_1 = 2\gamma_2 = \pi - 2\alpha, \\ \angle B_1 = 2\alpha_2 = \pi - 2\beta, \\ \angle C_1 = 2\beta_2 = \pi - 2\gamma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \dfrac{\pi}{2} - \gamma_2 = \dfrac{1}{2}(\pi - \angle A_1) = \alpha_2 + \beta_2, \\ \beta = \dfrac{\pi}{2} - \alpha_2 = \dfrac{1}{2}(\pi - \angle B_1) = \beta_2 + \gamma_2, \\ \gamma = \dfrac{\pi}{2} - \beta_2 = \dfrac{1}{2}(\pi - \angle C_1) = \alpha_2 + \gamma_2. \end{cases}$$

Остались вычисления. Для искомой площади S имеем

$$S = S_{A_1B_1C_1} + S_{A_1B_1C} + S_{AB_1C_1} + S_{A_1BC_1} =$$

$$= 30 + S\left(\cos^2\gamma + \cos^2\alpha + \cos^2\beta\right),$$

или

$$S\left(1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma\right) = 30 .$$

Перейдем к углам ортотреугольника и получим

$$1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma =$$

$$= 1 - \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - \gamma_2\right) - \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_2\right) - \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - \beta_2\right) =$$

$$= 1 - \sin^2\gamma_2 - \sin^2\alpha_2 - \sin^2\beta_2 =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\cos 2\alpha_2 + \cos 2\beta_2 + \cos 2\gamma_2 - 1\right) = \frac{2}{13} .$$

Окончательно имеем $S = 195$.

Задача 12. *В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты CC_1 и AA_1. Известно, что $AC = 1$ и $\angle C_1CA_1 = \alpha$. Найдите площадь круга, описанного около треугольника C_1BA_1.*

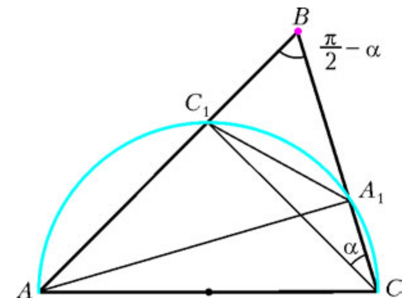

Рис. 12

Решение. Около четырехугольника AC_1A_1C можно описать окружность (так как отрезок AC виден из точек A_1 и C_1 под прямым углом), а секущие BA и BC опираются на ее диаметр AC (рис.12). Значит, коэффициент подобия треугольников BA_1C_1 и BAC есть

$$k = \cos\angle ABC = \cos\angle C_1BC =$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \angle C_1CA_1\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha .$$

Для радиусов описанных около них окружностей имеем

$$\frac{R_{BA_1C_1}}{R_{BAC}} = k = \sin\alpha .$$

Но

$$R_{BAC} = \frac{AC}{2\sin\angle ABC} = \frac{1}{2\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right)} = \frac{1}{2\cos\alpha} .$$

Поэтому

$$R_{BA_1C_1} = R_{BAC}\sin\alpha = \frac{1}{2\cos\alpha}\sin\alpha = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha ,$$

и искомая площадь равна

$$S = \pi R^2_{BA_1C_1} = \frac{\pi}{4}\operatorname{tg}^2\alpha .$$

Задача 13. *Через вершины A и B треугольника ABC проведена окружность, пересекающая стороны BC и AC в точках D и E соответственно. Площадь треугольника CDE в 7 раз меньше площади четырехугольника $ABDE$. Найдите DE и радиус окружности, если $AB = 4$ и $\angle C = 45°$.*

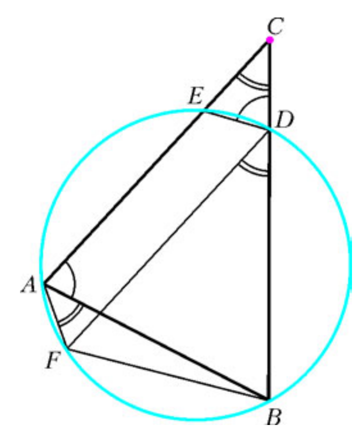

Рис. 13

Решение. Имеем стандартную и весьма распространенную геометрическую конструкцию (рис.13): из точки C к окружности проведены две секущие CA и CB. Четырехугольник $AEDB$ вписан в окружность, поэтому сумма его противоположных углов равна $180°$:

$$\angle CAB + \angle BDE = 180° .$$

Но смежные углы с вершиной в точке D также составляют $180°$:

$$\angle CDE + \angle BDE = 180° .$$

Поэтому $\angle CAB = \angle CDE$. Значит, ΔCAB подобен ΔCDE по двум углам. Коэффициент подобия равен

$$k = \sqrt{\frac{S_{CAB}}{S_{CDE}}} = \sqrt{\frac{S_{ABDE} + S_{CDE}}{S_{CDE}}} = \sqrt{\frac{7+1}{1}} = 2\sqrt{2} .$$

Поэтому

$$DE = \frac{AB}{k} = \frac{4}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

Осталось найти радиус окружности. Проведем $DF \parallel AC$. Тогда $AF = DE = \sqrt{2}$. По теореме о вписанном угле, $\angle BAF = \angle BDF = \angle C = 45°$. По теореме косинусов для ΔABF имеем

$$BF^2 = AF^2 + AB^2 - 2AF \cdot AB \cdot \cos\angle BAF = 10,$$

$$BF = \sqrt{10}.$$

Согласно следствию из теоремы синусов, находим радиус окружности:

$$R = \frac{BF}{2\sin\angle BAF} = \sqrt{5}.$$

Задача 14. *На сторонах острого угла с вершиной O взяты точки A и B. На луче OB взята точка M на расстоянии $3 \cdot OA$ от прямой OA, а на луче OA – точка N на расстоянии $3 \cdot OB$ от прямой OB. Радиус окружности, описанной около треугольника AOB, равен 3. Найдите MN.*

Решение. Примем такие обозначения: $OB = a$, $OA = b$, $\angle AOB = \alpha$, $MN = x$ (рис.14). По условию $MM_1 = 3b$, где

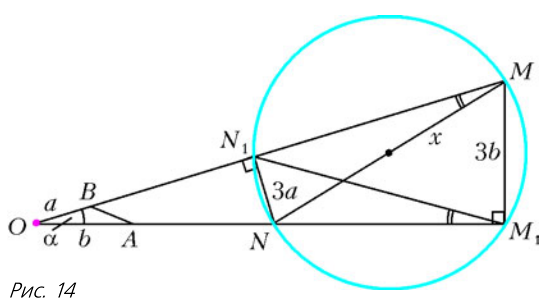

Рис. 14

$MM_1 \perp OA$; $NN_1 = 3a$, где $NN_1 \perp OB$; радиус описанной около треугольника OAB окружности $R_{AOB} = 3$.

В четырехугольнике MM_1NN_1 сумма противоположных углов равна $180°$ ($\angle MM_1N + \angle NN_1M = 90° + 90° = 180°$). Поэтому около него можно описать окружность. Диаметром ее является искомый отрезок MN. Получим типичную геометрическую конфигурацию: окружность и две секущие OM и OM_1, причем секущие проходят через концы диаметра MN. Здесь, как известно, имеются две пары подобных треугольников.

а) Треугольники ON_1N и OM_1M подобны как прямоугольные с общим острым (по условию) углом α.

б) Треугольники ON_1M_1 и ONM подобны по двум углам. Действительно, угол α у них общий, а углы OM_1N_1 и OMN равны в силу теоремы о вписанном угле (они опираются на одну и ту же дугу N_1N).

Так как ΔON_1N подобен ΔOM_1M, то $ON_1 : OM_1 = NN_1 : MM_1 = 3a : 3b = a : b$. Стороны треугольников OBA и ON_1M_1, прилежащие к общему углу α, пропорциональны:

$$\frac{OB}{OA} = \frac{ON_1}{OM_1} = \frac{a}{b}.$$

Поэтому ΔOBA подобен ΔON_1M_1, $\angle OAB = \angle OM_1N_1$, прямые AB и M_1N_1 параллельны. Но $\angle OM_1N_1 = \angle NM_1N_1 = \angle OMN$. Значит, $\angle OAB = \angle OMN$ и ΔOAB подобен ΔOMN по двум углам. Из подобия треугольников имеем

$$\frac{OA}{OM} = \frac{AB}{MN}, \quad MN = x = \frac{OM \cdot AB}{OA}.$$

Здесь $OA = b$, $OM = \dfrac{MM_1}{\sin\angle MOM_1} = \dfrac{3b}{\sin\alpha}$ (из ΔOMM_1), $AB = 2R_{AOB}\sin\alpha = 2 \cdot 3\sin\alpha = 6\sin\alpha$ (по теореме синусов для ΔAOB). Окончательно,

$$MN = x = \frac{3b \cdot 6\sin\alpha}{\sin\alpha \cdot b} = 18.$$

Задача 15. *Диаметр AB и хорда CD окружности пересекаются в точке E, причем CE = DE. Касательные к окружности в точках B и C пересекаются в точке K. Отрезки AK и CE пересекаются в точке M. Найдите площадь треугольника CKM, если AB = 10, AE = 1.*

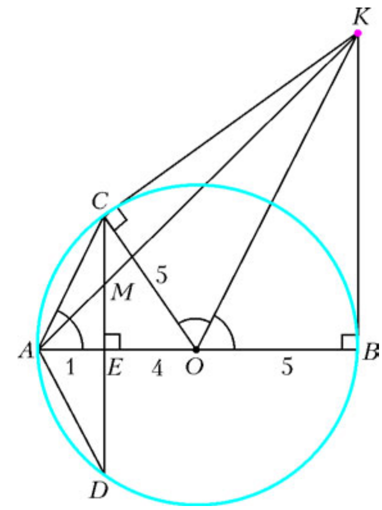

Рис. 15

Решение. Диаметр AB рассекает хорду CD, не являющуюся диаметром, на две равные части ($CE = ED$ по условию), значит, он перпендикулярен ей: $CD \perp AB$ (рис.15). Так как KB – касательная, то $KB \perp AB$. Поэтому $CD \parallel KB$.

Пусть O – центр окружности. По теореме Пифагора из треугольника CEO

$$CE = \sqrt{CO^2 - EO^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3.$$

Прямоугольные треугольники COK и BOK равны (OK – общая гипотенуза, $CO = OB = \frac{1}{2}AB = 5$). Поэтому $\angle KOC = \angle KOB = \frac{1}{2}\angle BOC = \angle BAC$. Значит, ΔACE подобен ΔOKB (по двум углам) и

$$\frac{KB}{CE} = \frac{OB}{AE} \Rightarrow KB = \frac{OB}{AE} \cdot CE = \frac{5}{1} \cdot 3 = 15.$$

Но ΔAME подобен ΔAKB ($ME \parallel KB$), откуда

$$\frac{ME}{KB} = \frac{AE}{AB} \Rightarrow ME = \frac{AE}{AB} \cdot KB = \frac{1}{10} \cdot 15 = \frac{3}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow CM = CE - ME = 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}.$$

В треугольнике CKM известны сторона (основание): $CM = \dfrac{3}{2}$ и высота, проведенная к ней: $BE = 9$. Поэтому

$$S_{CKM} = \frac{1}{2} CM \cdot BE = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot 9 = \frac{27}{4} = 6{,}75.$$

Задача 16. *На стороне AB треугольника ABC как на диаметре построена окружность, пересекающая стороны AC и BC в точках D и E соответственно. Прямая DE делит площадь треугольника ABC пополам и образует с прямой AB угол $15°$. Найдите углы треугольника ABC.*

Решение. Не ограничивая общности, можно считать, что прямые AB и DE пересекаются в точке K луча AB (рис.16). Секущие CA и CB опираются на диаметр AB. Коэффициент k подобия треугольников CDE и CAB равен косинусу угла C.

(Продолжение см. на с. 56)