Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 августа 2006 года по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №3–2006» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М1996» или «Ф2003». В графе «От кого» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи М1996, М1997, М2001, М2004 предлагались на XXVII Турнире городов, задачи М1998, М2000 предлагались на IX Кубке памяти А.Н. Колмогорова, задача М1999 предлагалась на XXVI Уральском турнире юных математиков, задача М2005 – на олимпиаде лицея 239 Санкт-Петербурга.

Задачи М1996–М2005, Ф2003–Ф2012

М1996. При каких n найдутся такие различные натуральные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$, что сумма $\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \ldots + \frac{a_n}{a_1}$ – целое число?

А.Шаповалов

М1997. На сторонах прямоугольного треугольника ABC площади 1 построены во внешнюю сторону квадраты с центрами D, E, F. Докажите, что площадь треугольника DEF не меньше 2.

В.Филимонов, И.Богданов, Ю.Кудряшов

М1998. В одной кучке лежат n камней, а в другой – k камней. Каждую минуту автомат выбирает кучку, в которой число камней четное, и половину имеющихся в ней камней перекладывает в другую кучку (если в обеих кучках четное число камней, то автомат выбирает кучку случайным образом). Если в обеих кучках число камней оказалось нечетным, автомат прекращает работу. Сколько существует упорядоченных пар натуральных чисел (n, k), не превосходящих 1000, для которых автомат через конечное время обязательно остановится?

А.Гейн

М1999. Можно ли расположить на бесконечном клетчатом листе 2005 прямоугольников из трех клеток так, чтобы каждый прямоугольник с двумя другими прямоугольниками имел ровно по одной общей точке, а с остальными прямоугольниками общих точек не имел?

К.Кноп, С.Берлов

М2000. Есть n мудрецов и неограниченный запас колпаков каждого из n различных цветов. Мудрецы одновременно закрывают глаза, и каждому из них надевают на голову какой-то колпак (например, все надетые колпаки могут оказаться одного цвета). Мудрецы открывают глаза. Каждый видит, какие колпаки надеты на остальных, но не видит своего. После этого каждый мудрец пытается угадать, какого цвета его колпак, записав свою гипотезу на бумажке втайне от остальных. Докажите, что мудрецы могут заранее договориться о совместных действиях таким образом, чтобы в любом случае хотя бы один из них угадал цвет своего колпака.

Фольклор

М2001. Дан треугольник ABC, в котором проведены биссектрисы AA_1, BB_1 и CC_1. Известно, что величины углов A, B и C относятся как 4:2:1. Докажите, что $A_1B_1 = A_1C_1$.

С.Токарев

М2002*. Пусть a, b, c – положительные числа, сумма которых равна 1. Докажите, что

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{25}{1 + 48abc}.$$

Я.Алиев

М2003*. а) Докажите, что при любых натуральных a, b, c, n уравнение

$$x^2 + y^2 + z^2 = \left(a^2 + b^2 + c^2\right)^n$$

разрешимо в натуральных числах x, y, z.

б) Докажите, что при любом нечетном $n \geq 3$ и любых натуральных a, b, c уравнение

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = t^n$$

разрешимо в натуральных числах x, y, z, t.

в) Докажите, что найдутся такие натуральные a, b, c, что уравнение

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = t^2$$

неразрешимо в натуральных числах x, y, z, t.

А.Авакян

М2004. У Карлсона имеется 1000 банок с вареньем. Банки не обязательно одинаковые, но в каждой не больше чем $1/100$ часть всего варенья. На завтрак Карлсон может съедать поровну варенья из любых 100 банок. Докажите, что Карлсон может действовать так, чтобы за некоторое количество завтраков съесть все варенье.

Д.Мусатов

М2005*. Докажите, что выпуклый многогранник с n вершинами нельзя разрезать менее чем на $n-3$ тетраэдра.

Р.Карасев

Ф2003. Тонкое велосипедное колесо раскрутили вокруг его оси, удерживая ее неподвижной. При этом пришлось совершить работу A и вся эта работа пошла на увеличение механической энергии колеса. Колесо осторожно поставили на горизонтальную поверхность тележки такой же массы, которая может свободно двигаться по гладкому горизонтальному столу. Какое максимальное количество теплоты может выделиться в системе, пока колесо не покинет тележку? Колесо во время движения остается вертикальным.

А.Сложнов

Ф2004. На гладком горизонтальном столе находится тележка массой 3 кг, на ее поверхности лежит очень легкий лист бумаги, на нем – груз массой 1 кг. Лист бумаги тянут в горизонтальном направлении силой 10 Н. С каким ускорением движется этот лист, если коэффициент трения между бумагой и каждым из тел составляет 0,7?

А.Старов

Ф2005. Через легкий блок, закрепленный на большой высоте над горизонтальной поверхностью земли, переброшена гибкая веревка. Концы веревки сложены внизу двумя «бухтами», которые не препятствуют движению. С одной стороны блока за веревку ухватился человек массой $M = 60$ кг, который быстро перебирает руками, стараясь висеть на одной высоте над землей. При некоторой установившейся скорости движения веревки это ему удается. Найдите эту скорость. Масса одного метра веревки $\rho = 2$ кг/м. Ускорение свободного падения считать равным $g = 10$ м/с^2. Трение в блоке отсутствует.

А.Повторов

Ф2006. Теплоизолированный сосуд, содержащий гелий при температуре $T_0 = 30$ К, движется со скоростью $v = 1000$ м/с. Какой станет температура газа в сосуде через некоторое время после резкой остановки сосуда? Теплообменом газа со стенками сосуда пренебречь. Моль гелия имеет массу $m = 4$ г.

А.Старов

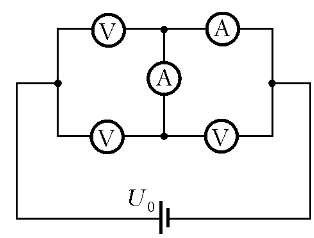
Ф2007. В цилиндре под поршнем находится при нормальных условиях порция гелия в количестве $\nu = 2$ моль. Ей сообщают количество теплоты $Q = 100$ Дж, при этом температура гелия увеличивается на $\Delta T = 10$ К. Оцените изменение объема газа, считая его теплоемкость в этом процессе постоянной.

А.Газов

Ф2008. Закрепленная неподвижно непроводящая тонкостенная сфера массой M равномерно заряжена по поверхности полным зарядом Q. Из нее вырезают маленький кусочек, масса которого равна $1/10000$ массы сферы, сминают его в крошечный комочек, помещают в центр сферы (заряд кусочка при этом сохраняется) и отпускают. Какая скорость у него будет на большом расстоянии от сферы? А какую скорость он приобретет к моменту вылета из сферы? Силы тяжести отсутствуют.

А.Зильберман

Ф2009. К идеальной батарейке с ЭДС $U_0 = 1{,}3$ В подключена мостиковая электрическая цепь, собранная из трех одинаковых вольтметров и двух одинаковых миллиамперметров, причем один из миллиамперметров включен в диагональ мостика (см. рисунок). Известно, что показания миллиамперметров отличаются в 3 раза. Определите показания каждого из вольтметров. Сопротивление вольтметра больше, чем у миллиамперметра.



А.Простов

Ф2010. Две одинаковые легкие пружины прикреплены к маленькому массивному телу. Одна из пружин другим концом приклеена к полу, другая пружина – к потолку. Рассмотрим два варианта малых колебаний тела – в вертикальном и горизонтальном направлениях. Найдите отношение периодов таких колебаний. Пружины в положении равновесия вертикальны. Начальные длины пружин считать малыми.

Р.Александров

Ф2011. Параллельно включены катушки с индуктивностями L и $2L$ и резистор сопротивлением R. В данный момент токи через катушки одинаковы по величине, текут в одну сторону и составляют I_0 каждый. Какой полный заряд протечет через резистор за большое время и сколько тепла выделится в резисторе? Указанные элементы цепи считать идеальными, никаких других элементов в цепи нет.

З.Рафаилов

Ф2012. Катушку индуктивности и конденсатор соединили параллельно и подключили к сети переменного напряжения 220 В, 50 Гц последовательно с амперметром переменного тока (сопротивление амперметра очень мало). Показания амперметра составили при этом 0,015 А. Теперь катушку и конденсатор соединили последовательно и вновь подключили к сети. Напряжение, измеренное на конденсаторе вольтметром (его сопротивление можно считать очень большим), составило 300 В, а напряжение на зажимах катушки оказалось равным 85 В. Считая показания приборов точными, определите по этим данным емкость конденсатора, индуктивность катушки и сопротивление провода, которым намотана катушка. Конденсатор можно считать идеальным, потери в сердечнике катушки очень малы – неидеальность катушки определяется сопротивлением провода, которым она намотана.

А.Длинов

Решения задач М1976–М1980, Ф1988–Ф1997

М1976. *Пусть N – любое натуральное число. Докажите, что в десятичной записи либо числа N, либо числа $3N$ найдется одна из цифр 1, 2, 9.*

Если число N начинается на 1, 2 или 9, то доказывать нечего.

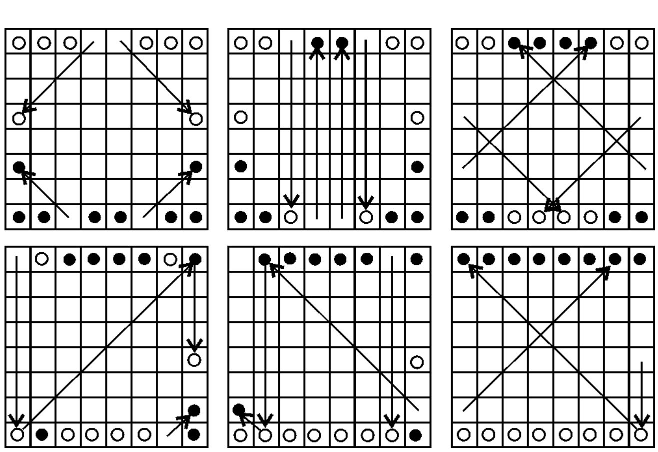
Если число N начинается на 3, 4, 5, 6, 7 или 8 и имеет k цифр, то $3\cdot 10^{k-1} \le N < 9\cdot 10^{k-1}$, поэтому $9\cdot 10^{k-1} \le$ $\le 3N < 27\cdot 10^{k-1}$, откуда $9\cdot 10^{k-1} \le 3N < 3\cdot 10^{k}$, т.е. число $3N$ либо имеет k цифр и начинается с цифры 9, либо имеет $k+1$ цифру и начинается с цифры 1 или 2.

П.Кожевников

М1977. *В первом ряду шахматной доски стоят 8 одинаковых черных ферзей, а в последнем ряду – 8 одинаковых белых ферзей. За какое минимальное число ходов белые ферзи могут обменяться местами с черными? Ходят белые и черные по очереди, передвигая по одному ферзю за ход. Ферзь ходит по вертикали, горизонтали или диагонали на любое число клеток (если на его пути нет других ферзей).*

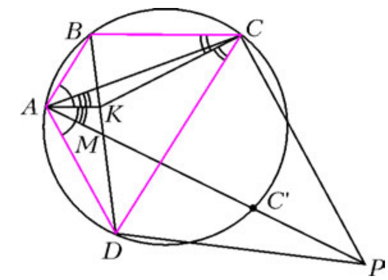
Ответ: за 23 хода.

Из пары ферзей на одной не крайней вертикали тот, кто сходит раньше, должен сделать минимум два хода; 6 таких пар затратят не менее 18 ходов. Из четверки угловых ферзей тот, кто сходит первым, тоже должен сделать минимум два хода, итого еще 5 ходов.



Пример на 23 хода приведен на рисунке (первым ходит черный ферзь).

Э.Лю, С.Дориченко



М1978. *Биссектрисы углов BAD и BCD вписанного четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке K, лежащей на диагонали BD. Точка M – середина отрезка BD. Прямая, параллельная AD и проходящая через C, пересекает луч AM в точке P, лежащей вне четырехугольника. Докажите, что $DP = DC$.*

По свойству биссектрисы (см. рисунок), $\frac{AB}{DA} = \frac{BK}{DK} =$ $= \frac{BC}{CD}$, поэтому $AB\cdot CD = BC\cdot DA$.

Пусть точка C' симметрична точке C относительно серединного перпендикуляра к отрезку BD, и прямая AC' пересекает BD в точке M'. Из симметрии $BC = DC'$, $DC = BC'$, отсюда $AB\cdot BC' = AD\cdot DC'$. Четырехугольник $ABC'D$ вписанный, поэтому сумма углов ABC' и ADC' равна 180°. Площади треугольников ABC' и ADC' равны:

$$S_{ABC'} = \frac{1}{2}AB\cdot BC'\sin\angle ABC' =$$

$$= \frac{1}{2}AD\cdot DC'\sin\angle ADC' = S_{ADC'}.$$

С другой стороны, $S_{ABC'} = \frac{1}{2}AC'\cdot BM'\sin\angle AM'B$, $S_{ADC'} = \frac{1}{2}AC'\cdot DM'\sin\angle AM'D$. Так как $\sin\angle AM'B =$ $= \sin\angle AM'D$, то $BM' = DM'$, т.е. M' совпадает с M, и C' лежит на прямой, содержащей точки A, M, P. Поскольку из симметрии дуги BC и DC' равны, то $\angle MAD = \angle CAB = \angle CDB$. Аналогичным образом из условия $AB\cdot CD = BC\cdot DA$ выводятся равенства $\angle MCD = \angle BCA = \angle BDA$.

Так как $CP \parallel AD$, то $\angle ADC = \angle PCD$ и $\angle CPM =$ $= \angle MAD$. Из последнего равенства вытекает, что $\angle CPM = \angle MDC$, значит, четырехугольник $CPDM$ вписан в окружность, поэтому $\angle MPD = \angle MCD =$ $= \angle MDA$. Окончательно,

$$\angle CPD = \angle CPM + \angle MPD =$$

$$= \angle MDC + \angle MDA = \angle ADC = \angle PCD,$$

т.е. треугольник DCP равнобедренный, и $DP = DC$.

Замечание. Вписанные четырехугольники с равными произведениями противоположных сторон называются *гармоническими*. В таких четырехугольниках диагональ является симедианой (т.е. прямой, симметричной медиане относительно соответствующей биссектрисы) для треугольников, на которые четырехугольник разбит другой диагональю. Это одно из интересных свойств гармонических четырехугольников, которое фактически и использовалось в решении задачи.

В.Шмаров